حسین کریمی

دایرهٔ محاطی

اشاره

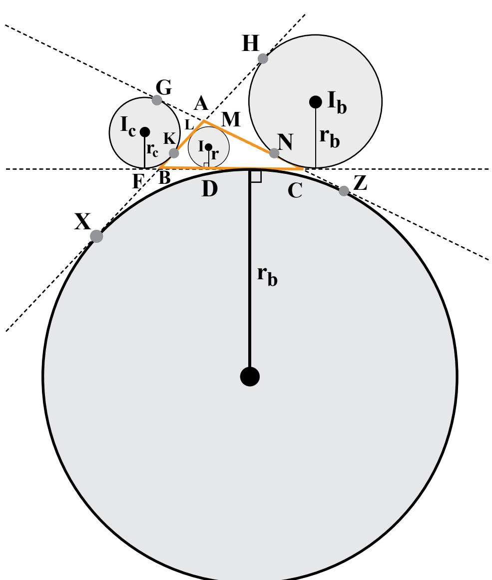
هرگاه بتوانیم دایره‌ای مماس بر تمام خط‌های واصل بین دو رأس متوالی یک n ضلعی رسم کنیم، آن دایره را «دایرهٔ محاطی» گوییم.

کلیدواژه‌ها دایره محاطی، نیمساز، مثلث، زاویه n ضلعی

شـــرط وجود دایرهٔ محاطی بـــرای یک nضلعی آن است که نیم‌ســـازهای آن شـــکل در یک نقطه به هم برســـند. آن نقطه را معمولاً با I نشان می‌دهند و نقطه را «هم‌رسی نیم‌ســـازها» یا همان مرکز دایرهٔ محاطی می‌نامند. توجه داریم که در بعضی از شـــکل‌ها چنین نقطه‌ای وجود ندارد. مثلاً در مستطیل چهار نیم‌ساز در یک نقطه به هم نمی‌رســـند. پس دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع مســـتطیل مماس باشـــد. تمام n ضلعی‌های منتظم دایرهٔ محاطی دارند.

در این بیـــن، مثلث موقعیت خاصـــی دارد. تمام مثلث‌ها (از هر نوع که باشـــند) دایـــرهٔ محاطی دارند و نه‌تنها یک دایـــرهٔ محاطی، بلکه چهار دایرهٔ محاطی دارند.

دایرهٔ به مرکز I را دایرهٔ محاطی داخلی می‌نامند که I محل تلاقی سه نیم‌ساز داخلی مثلث است. سه دایرهٔ



شکل ۱

دیگر به مرکزهـــای I_a،I_b و I_c را دایره‌های محاطی خارجی می‌نامند که مرکز آن‌ها محل تلاقی دو نیم‌ساز خارجی مثلث است. (شکل ۱)

***

یادآوری: هر نقطه که روی نیم‌ساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

بـــا توجه به مطلب فوق می‌توان گفت که در صفحهٔ مثلـــث، چهار نقطه وجود دارد که از ســـه ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها، متساوی‌الفاصله‌اند.

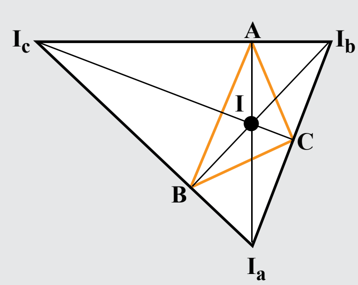
اکنون این سؤال پیش می‌آید که: اگر مثلث ABC را رسم کنیم و محل تلاقی نیمسازها را I، I_a، I_b و I_c (مراکز دایره‌های محاطی) بنامیم و سپس مثلث و نیمسازها را و یکی از آن چهار نقطه را هم پاک کنیم، آیا با در دست داشـــتن ســـه نقطه می‌توان دوباره مثلث ABC را رسم کرد؟

مسئلهٔ ۱: با در دست داشتن سه نقطهٔ I_a، I_b و I_c (ســـه مرکز دایره‌های محاطی خارجـــی مثلث ABC) مثلث ABC را رسم کنید.

مسئلهٔ ۲: با در دست داشتن سه نقطهٔ I، I_b و I_c (به ترتیب مراکز دایرهٔ محاطی داخلی و دو دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC) مثلث ABC را رسم کنید.

قبل از آنکه به دو مسئلهٔ فوق جواب بدهیم، به نکتهٔ مهمی اشاره می‌کنیم.

نکته: اگر در شکل ۲ نقطهٔ I نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی مثلث ABC و نقطه‌های I_a، I_b و I_c نقطه‌های تلاقی دو نیمســـاز خارجی در مثلث ABC فرض شوند، I_b و I_c روی نیمساز خارجی زاویهٔ رأس A، و I_a روی نیمساز داخلی رأس A قرار دارند. همچنین می‌دانیم، نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه بر هم عمودند. پـــس: $AI_a \perp I_bI_c$. و به همین ترتیب: $BI_b \perp I_aI_c$ و $CI_c \perp I_aI_b$



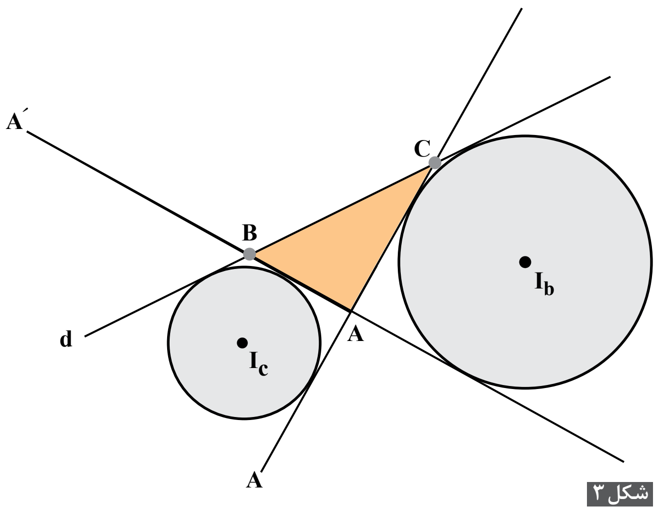
شکل ۲

نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی مثلث ABC، یعنی نقطهٔ I، همان نقطهٔ همرسی سه ارتفاع مثلث $I_bI_cI_a$ است.

◆ **حل مســـئلهٔ ۱.** مثلث $I_aI_bI_c$ و سه ارتفاع AI_a، BI_b و CI_c آن را رســـم می‌کنیم (شکل ۳). مثلث ABC جواب مسئله است.

◆ **حل مســـئلهٔ ۲.** مثلث II_bI_c را رســـم می‌کنیم. از I_c عمودی بر امتداد II_b و از I_b عمودی بر امتداد II_c رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ I_a قطع کنند. با در دست داشتن مثلث $I_aI_bI_c$ مانند مسئلهٔ ۱ عمل می‌کنیم.

◆ **مســـئلهٔ ۳.** دو دایرهٔ محاطی خارجـــی (I_b و r_b) و (I_c و r_c) از مثلث ABC داده شـــده‌اند. مثلث ABC را رسم کنید.



شکل ۳

◆ **حل.** مماس‌های داخلی دو دایره (خط‌های Δ و 'Δ) را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را A می‌نامیم (شکل ۳). خط d را در مقام مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ داده شده رسم می‌کنیم تا خط‌های Δ و 'Δ را در نقطه‌های B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.

با توجه به شـــکل ۲ و اینکـــه: AB=c، AC=b، BC=a، ۲P=محیط و S=مساحت، روابط متریک زیر را داریم:

$$r=\frac{s}{p}\ ,\ r_a=\frac{s}{p-a}\ ,\ r_b=\frac{s}{p-b}\ ,\ r_c=\frac{s}{p-c}$$

AX=AZ=BE=BH=CF=CG=P
BF=BK=CE=CN=AM=AL=P-a
AG=AK=CZ=CY=BD=BL=P-b
BY=BX=AH=AN=CD=CM=P-c